OPERACIONES CON POLINOMIOS 1.

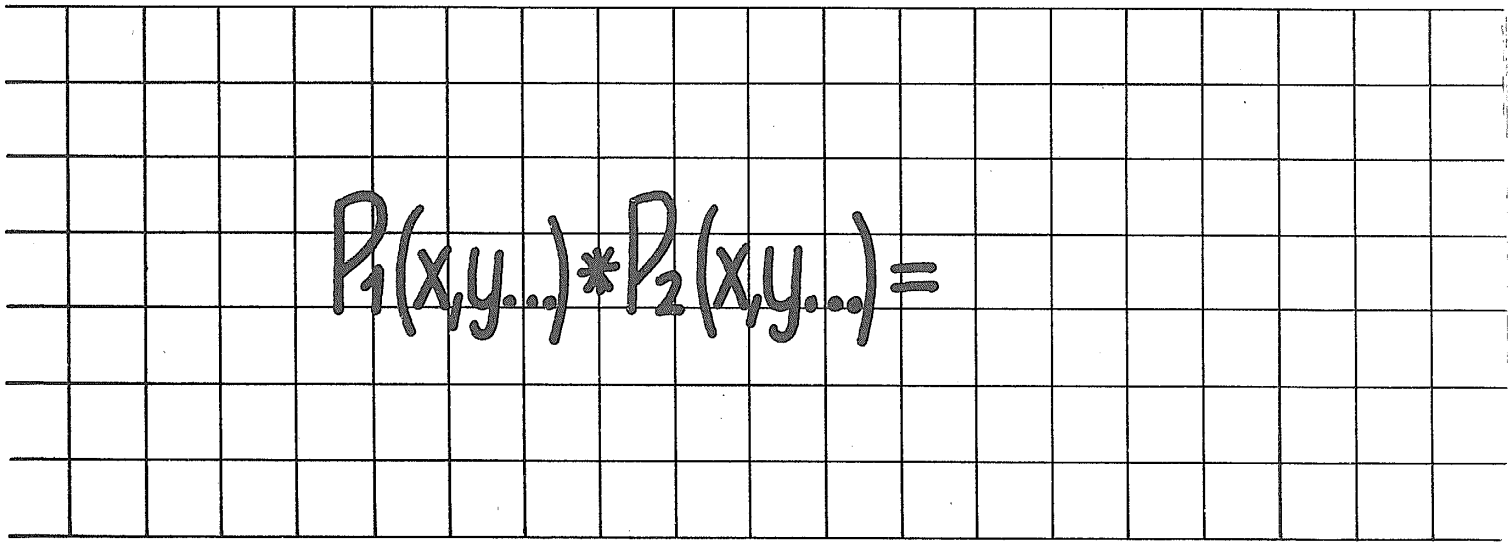
Suma, resta, multiplicación y división

Obras que integran el bloque 1 *(Álgebra. Estructuras y operaciones)*

1. Conjuntos
2. Estructuras matemáticas
3. El conjunto de los enteros
4. Operaciones con enteros
5. Lenguaje algebraico 1. Formación
6. Lenguaje algebraico 2. Transformación
7. ***Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división***
8. Operaciones con polinomios 2. Productos notables
9. Operaciones con polinomios 3. Factorización
10. El conjunto de los racionales
11. Operaciones con expresiones racionales
12. El conjunto de los reales
13. Operaciones con expresiones reales
14. El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 1

Álgebra. Estructuras y operaciones

Módulo 7

OPERACIONES CON POLINOMIOS 1.

Suma, resta, multiplicación y división

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
OPERACIONES CON POLINOMIOS 1. Suma, resta, multiplicación y división
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1985
ISBN 968-24-1507-1

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

7.1 Polinomio con una indeterminada y coeficientes enteros 9

7.2 Polinomio con varias indeterminadas y coeficientes enteros 33

7.3 Suma de polinomios en $\mathbb{Z}$ 38

7.4 Resta de polinomios en $\mathbb{Z}$ 52

7.5 Multiplicación de polinomios en $\mathbb{Z}$ 63

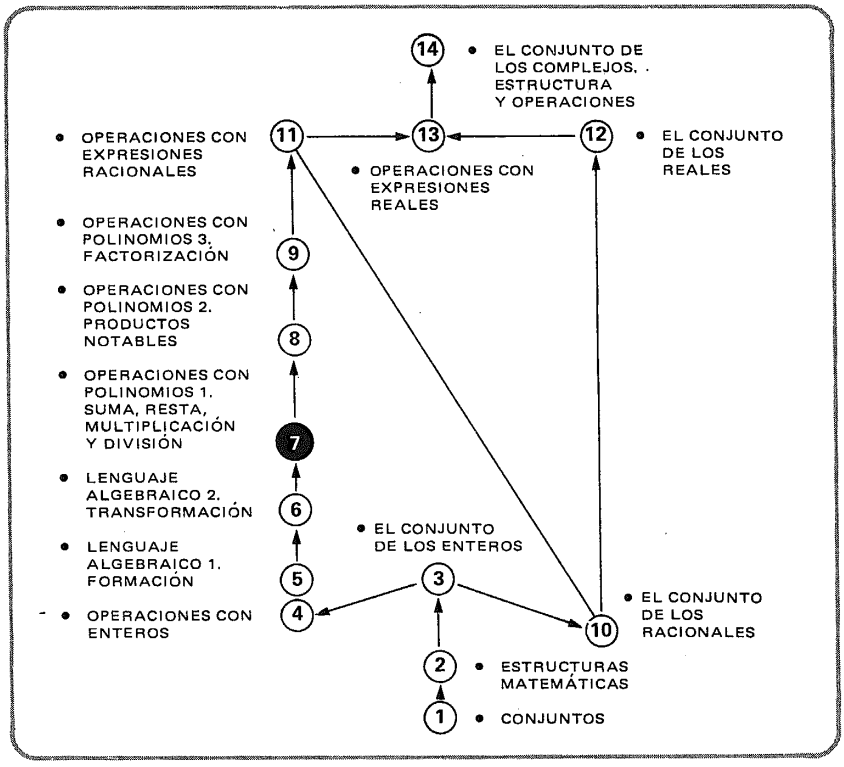
7.6 División de polinomios en $\mathbb{Z}$ 85

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 1. Álgebra. Estructuras y operaciones

Objetivos: establecer las estructuras matemáticas relacionadas con los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos. Efectuar las cuatro operaciones binarias fundamentales y las operaciones monarias de potenciación y radicación con expresiones algebraicas pertenecientes a cada uno de los cinco conjuntos mencionados

Esquema estructural del bloque 1



Módulo 7. Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división

Objetivos: efectuar operaciones de suma, resta, multiplicación y división de polinomios con coeficientes enteros

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Nociones de las estructuras matemáticas con una o dos leyes de composición interna	1	2
• Manejo de los números enteros	1	4
• Formación de expresiones algebraicas	1	5
• Transformación de expresiones algebraicas	1	6

7.1

Polinomio con una indeterminada y coeficientes enteros

1

Un número indeterminado: x

2

Si efectuamos, con esta indeterminada x
y con números enteros determinados,
operaciones de:

suma, resta, multiplicación y **potenciación**

originamos expresiones como las que
aparecen en el cuadro siguiente.

3

x →	$7x^2 - 1$	$5x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 4$
↓	$8x^3 + 5$	$5x^0 = 5x1 = 5$
$x + 3$	$-6x^4 + 7x$	$3x^3 - 8x^2 + 3$
$5x$	$x^2 - 2x$	$10x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 120$
$5x + 4$	$x^3 + 9$	$x^0 = 1$
x^2	$x^4 - 16$	$0 \cdot x = 0$
$7x^2$		

4

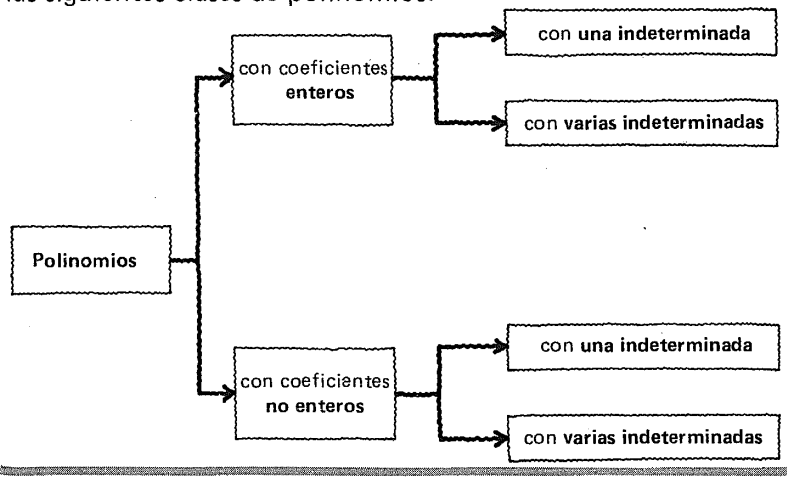
A estas expresiones
algebraicas les llamamos

polinomios

con una indeterminada (x)
y con coeficientes enteros.

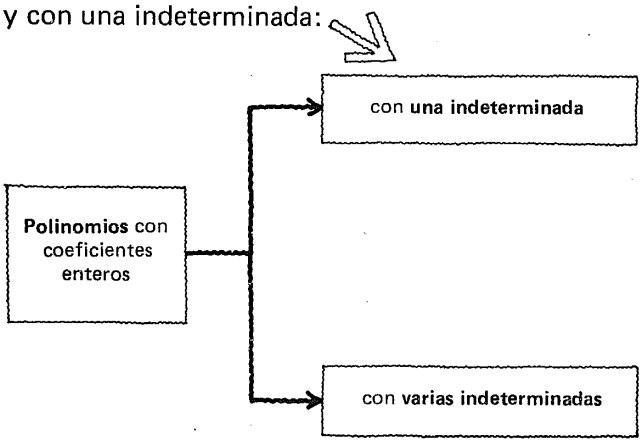
5

En este submódulo consideraremos
las siguientes clases de polinomios:



6

Empezaremos con los
polinomios con coeficientes enteros
y con una indeterminada:



7

Simbolizaremos así

$P(x)$

un polinomio cualquiera
con una indeterminada (x)
y le llamaremos
polinomio en x.

8

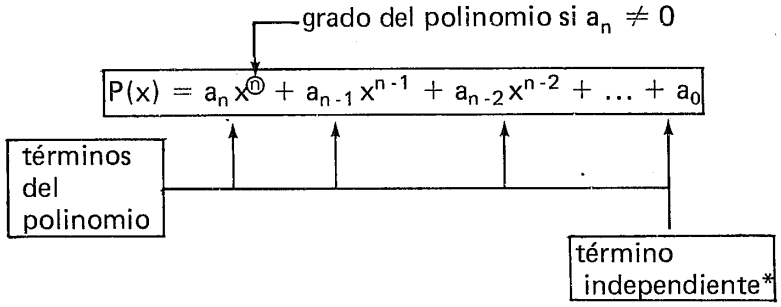
Forma general de un **polinomio en x**
con coeficientes enteros

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

coeficientes $a_i \in \mathbb{Z}$
exponentes $\in \mathbb{N}$

9

Estudiemos con atención el esquema siguiente.



* Término independiente: $a_0 = a_{n-n} x^{n-n} = a_0 x^0 = a_0$

10

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

Para

$n = 3$
$a_3 = 5$
$a_2 = -3$
$a_1 = -2$
$a_0 = 8$

el polinomio toma la forma

_____

$5x^3 - 3x^2 - 2x + 8$

11

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

Para $\begin{cases} n = 2 \\ a_2 = 1 \\ a_1 = -3 \\ a_0 = 5 \end{cases}$

el polinomio toma la forma

_____

$x^2 - 3x + 5$

12

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

Para $\begin{cases} n = 5 \\ a_5 = -1 \\ a_4 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_2 = 3 \\ a_1 = -2 \\ a_0 = 0 \end{cases}$

el polinomio toma la forma

$-x^5 + 3x^2 - 2x$

13

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

Para $\begin{cases} n = 3 \\ a_3 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$

el polinomio toma la forma

x^3

14

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

Para $\begin{cases} n = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_0 = 0 \end{cases}$

tenemos el polinomio

$3x$

15

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

Para $\begin{cases} n = 0 \\ a_0 = 3 \end{cases}$

se tiene el polinomio

$3x^0 = 3 \cdot 1 = 3$

16

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

Para $\begin{cases} n = 0 \\ a_0 = 1 \end{cases}$

el polinomio tiene el aspecto

$1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$

17

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

Para $\begin{cases} n = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$

el polinomio es

$0 \cdot x^0 = 0 \cdot 1 = 0$

18

$5x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 5x - 1$

Este polinomio es de [_____] grado.

cuarto

19

$6x^5 - 4$

Éste es un polinomio de [_____] grado.

quinto

20

$6x^5 - 4$

A éste le llamamos

polinomio incompleto de quinto grado.

Los grados de los términos faltantes son:

[_____]

4, 3, 2, 1

21

Podemos
escribir el polinomio completo
en esta forma:

$6x^5 + 0 + 0 + 0 + 0 - 4$

o en esta:

$6x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 - 4 \cdot x^0$

22

$x^3 + 8$

Escribir este polinomio en su forma completa:

$x^3 + 0 + 0 + 8$

23

Un polinomio de grado 3 (o de tercer grado),
escrito en su forma completa,

tiene [____] términos.
¿cuántos?

4

24

$-7x^4 + 3x$

Escribir este polinomio en su forma completa:

$-7x^4 + 0 + 0 + 3x + 0$

25

Un polinomio de grado 4, escrito en su forma completa tiene [ ] términos.

5

26

Un polinomio completo de grado 2 tiene [ ] términos.

3

27

Un polinomio completo de grado 1
tiene [___] términos.

2

28

Un polinomio de grado 0
tiene [_____] términos.

1

29

En general, un polinomio de grado n
tiene [_____] términos.

n + 1

30

$5x^2 - 7x + x^4 - 8$

Este polinomio es de grado ⌊____⌋

4

31

$5x^2 - 7x + x^4 - 8$

¿Qué diferencia presenta este polinomio en relación con los que hemos estudiado?

⌊_____⌋

La diferencia consiste en que sus términos no están ordenados.

32

$5x^2 - 7x + x^4 - 8$

Ordenemos los términos de este polinomio y escribámoslo en forma completa, de acuerdo con el modelo estudiado.

⌊_____⌋

$x^4 + 0 + 5x^2 - 7x - 8$

33

$1 - x^5$

Polinomio completo y ordenado de acuerdo con el modelo:

$- x^5 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1$

34

x^6

Ordenar y expresar en forma completa, según el modelo estudiado:

$x^6 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$

35

$1 - x$

Ordenar y expresar en forma completa, de acuerdo con el modelo:

$- x + 1$

36

$-x+1$

Este es el término de grado [ ] de este polinomio;
también se le llama término [ ]

0 (cero)

independiente

37

Algunos
polinomios
reciben nombres
especiales.

38

La expresión algebraica que tiene
sólo **un** término, se llama:

monomio

Ejemplos: $3x^2$, x^5, $-8x$, 4, -5, 1, 0

39

Al polinomio de **dos** términos se le llama:

binomio

Ejemplos: $\begin{cases} 3x^2 + 1 \\ x^5 - 1 \\ x + 3 \\ x - 8 \end{cases}$

40

Llamamos

trinomio

al polinomio de **tres** términos.

Ejemplos: $\begin{cases} x^2 - 2x + 4 \\ x^2 + 3x - 7 \\ x^4 - 2x^3 + x \end{cases}$

41

Observemos cuidadosamente

las características indicativas de un **polinomio** con una indeterminada y coeficientes enteros.

1. Forma general

   $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$

2. Coeficientes enteros $a_i \in \mathbb{Z}$

3. Exponentes naturales

42

Para determinar si una expresión algebraica dada es un **polinomio entero**, es decir: un polinomio con una indeterminada y coeficientes enteros, nos preguntamos:

1. ¿La expresión dada obedece a la forma general:

   $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$?

2. ¿Los coeficientes son números enteros?

3. ¿Los exponentes son números naturales?

43

$5x^2 + 3x - 8$

Esta expresión algebraica,
¿es un polinomio entero?

Sí/No

Sí

44

$120x + 4x^2 - x^3 + 1$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

Sí

45

$3x + 2$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

Sí

46

x

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

Sí

47

-4

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

Sí

48

1

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

Sí

49

0

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

Sí

50

$4x^2 + x - x^{-1}$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

No

(El exponente $-1 \notin \mathbb{N}$)

51

$5 + x^{-1} - 3x^{-2}$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

No

(Los exponentes $-1, -2 \notin \mathbb{N}$)

52

$3x^2 + 5x - 8x^{\frac{1}{2}}$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

No

(El exponente $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$)

53

$3x^{\sqrt{2}} - 2x^{\sqrt{3}} + 4x^{\sqrt{5}}$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

No

(Los exponentes $\sqrt{2}, \sqrt{3}. \sqrt{5} \notin \mathbb{N}$.)

54

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}$$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

No

(Los coeficientes $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$)

55

$$\sqrt{2}x^2 - \pi x - ex^3$$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

No

(Los coeficientes $\sqrt{2}, -\pi, -e \notin \mathbb{Z}$)

56

$$5x^3 + 4x^2 + 3x - 2$$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

Sí

57

$7.5x^4 - 5.6x^3 + 0.7$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

No

(Los coeficientes $7.5, -5.6, 0.7 \notin \mathbb{Z}$)

58

$0.2x^{0.3} + 0.5x^{0.5} - 0.7$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

No

(Los coeficientes $0.2, 0.5 - 0.7 \notin \mathbb{Z}$, y los exponentes $0.3, 0.5 \notin \mathbb{N}$)

59

$$\frac{3x^2 + 5}{5x^3 + 3}$$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

No

(**No** tiene la forma general estudiada)

60

$$\frac{1}{x^2 + 3}$$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

No

(**No** obedece a la forma general estudiada)

61

$$\frac{1}{x}$$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

No

(**No** obedece a la forma general)

62

$$\frac{\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}}{x^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{3}}$$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

No

(**No** obedece a la forma general)

63

$(x + 2)(x - 3)$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

No

(**No** obedece a la forma general)

64

Atención.

$ax^2 + bx + c$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

¡Quién sabe!

No sabemos nada acerca de los coeficientes indeterminados a, b, c.

65

$ax^2 + bx + c$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

Sí

66

$ax^n + b^n$

$a, b \in \mathbb{Z}$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

¡Quién sabe!

No sabemos nada acerca de n.

67

$ax^n + b^n$

$a, b \in \mathbb{Z}$

$n \in \mathbb{N}$

¿Es un polinomio entero?

Sí/No

Sí

1.7.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.7.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

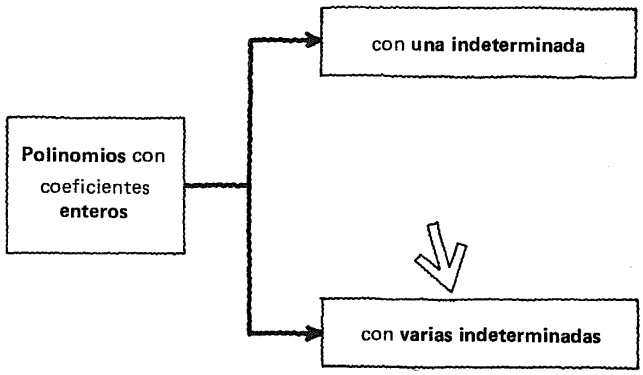
- *identificar,* en un conjunto dado de expresiones algebraicas, los polinomios enteros con una indeterminada;
- *decir* el grado de un polinomio entero con una indeterminada;
- *ordenar* un polinomio entero con una indeterminada, de acuerdo con el modelo estudiado.

7.2

Polinomio con varias indeterminadas y coeficientes enteros

68

Estudiaremos, ahora, los polinomios con varias indeterminadas y coeficientes enteros.



69

Estudiar con atención.

Características indicativas de un polinomio con varias indeterminadas y coeficientes enteros:

1. Suma de términos de la forma

   $\boxed{ax^n\ y^m\ z^r \ldots}$

2. Coeficientes enteros $a \in \mathbb{Z}$

3. Exponentes naturales $\boxed{n, m, r, \in \mathbb{N}}$

70

El

grado de un polinomio con varias indeterminadas

es el del término de grado mayor, teniendo en cuenta que el grado "global" de un término es igual a la suma de los exponentes de las indeterminadas que lo forman.

Así, el grado del término $ax^n y^m z^r \ldots$ es
$n + m + r + \ldots$

71

$x^2 + 2xy + y^2$

¿Es éste un polinomio entero con varias indeterminadas?

Sí/No

Sí

72

$x^2 + 2xy + y^2$

El grado de este polinomio es ⌊_____⌋

2

(Todos los términos tienen grado 2)

73

$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

¿Es éste un polinomio entero con varias indeterminadas?

Sí/No

En caso de serlo, su grado es ⌊____⌋

Sí

3

(Todos los términos tienen grado 3.)

74

$3x^3y - 8xy + 4$

¿Es éste un polinomio entero con varias indeterminadas?

Sí/No

En caso de serlo, su grado es ⌊____⌋

Sí

4

75

$xy + 4x^2y^2 - y^3$

¿Es un polinomio entero con varias indeterminadas?

Sí/No

En caso de serlo, su grado es ⌊____⌋

Sí

4

76

$$\frac{3}{4}xy - \frac{1}{8}$$

¿Es un polinomio entero con varias indeterminadas?

Sí/No

En caso de serlo, su grado es ⌊___⌋

No

77

En algunos casos se requiere **ordenar** los términos del polinomio en forma

descendente o **ascendente**

para las potencias de alguna de las indeterminadas.

78

Ordenar

$$3x^2y + x^3 + y^3 + 3xy^2$$

en forma **descendente** para x:

⌊_____⌋

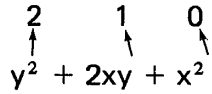
$$\overset{3}{\uparrow}\ \overset{2}{\uparrow}\ \overset{1}{\uparrow}\ \overset{0}{\uparrow}$$
$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

79

Ordenar

$2xy + x^2 + y^2$

En forma **descendente** para y:



1.7.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.7.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *identificar,* en un conjunto dado de expresiones algebraicas, los polinomios con varias indeterminadas y coeficientes enteros;
- *determinar* el grado de un polinomio, con varias indeterminadas;
- *ordenar* un polinomio con varias indeterminadas, en forma ascendente o descendente para una de las indeterminadas.

7.3

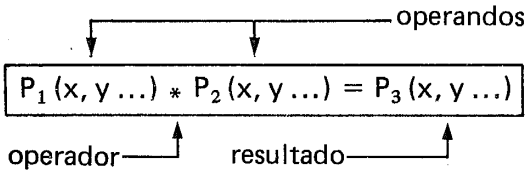
Suma de polinomios en $\mathbb{Z}$

80

Podemos representar simbólicamente una

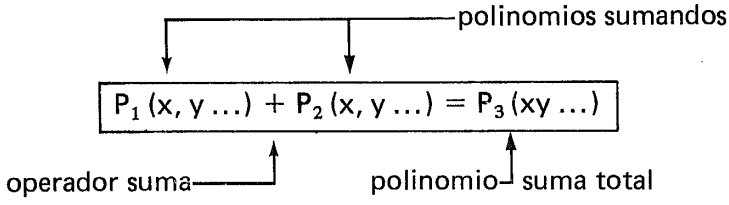
operación binaria de polinomios

en esta forma.



81

La **suma o adición de polinomios**
quedaría representada así:



82

Comenzaremos por **sumar monomios.**

83

Dos **monomios.**

$5x$ $7y$

Su suma

↳ _____

$5x + 7y$

84

Dos monomios.

x^2 y^2

Su suma

↳ _____

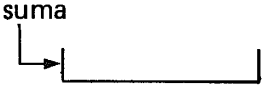
$x^2 + y^2$

85

Dos monomios.

$3ab$ $2a^2$

Su suma



$3ab + 2a^2$

86

Dos monomios.

$3x$ 5

Su suma

$3x + 5$

87

Tres monomios.

$5x^2$ $7y^2$ 8

Su suma

$5x^2 + 7y^2 + 8$

88

Tres monomios.

$5x^2$ $7x^2$ $8x^2$

Suma

- $5x^2 + 7x^2 + 8x^2$
  $= (5 + 7 + 8)x^2$
  $= 20x^2$

Aplicamos la operación de

reducción de términos semejantes

para simplificar el polinomio suma.

89

Cuatro monomios.

ab^2 $2ab^2$ ab^2 $3ab^2$

Suma

$ab^2 + 2ab^2 + ab^2 + 3ab^2 = 7ab^2$

90

Dos monomios.

$-7xy$ $-8xy$

Suma

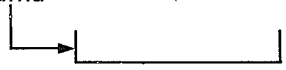
$-7xy + (-8xy)$
$= -7xy - 8xy$
$= -15xy$

91

Dos monomios.

$-14x^3 \quad 12x^3$

Suma



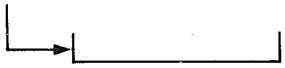
$-14x^3 + 12x^3 = -2x^3$

92

Dos monomios.

$x^2y^2 \quad -x^2y^2$

Suma



$x^2y^2 - x^2y^2 = 0$

93

Tres monomios.

$3at^3 \quad -7at^3 \quad -at^3$

Suma

$3at^3 - 7at^3 - at^3 = -5at^3$

94

Tres monomios.

$7ab^2$ $6ab$ $3ab^2$

Suma

$7ab^2 + 6ab + 3ab^2$

$= 10ab^2 + 6ab$

95

Cuatro monomios.

$3x$ $-8x^2$ $3x$ $-8x^2$

Suma

$3x - 8x^2 + 3x - 8x^2$

$= 6x - 16x^2$

96

Tres monomios.

$8x^4y^5$ $-x^4y^5$ 8

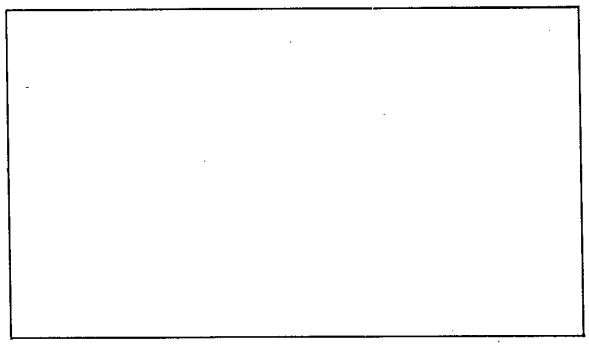
Suma

$8x^4y^5 - x^4y^5 + 8$

$= 7x^4y^5 + 8$

97

Establezcamos una **regla para sumar monomios.**



Por ejemplo:

Regla para sumar monomios.

Para sumar dos o más monomios:

- se escriben uno a continuación del otro, cada uno con su signo correspondiente
- se reducen los términos semejantes, si los hay

1.7.3.1

Práctica adicional de

suma de monomios,

si se considera necesario.

98

Ahora, intentemos sumar polinomios, no monomios.

99

Dos polinomios.

$$4x + 5y \quad -9x + z$$

Suma

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$4x + 5y + (-9x + z)$$

o bien, suprimiendo paréntesis:

$$4x + 5y - 9x + 7$$

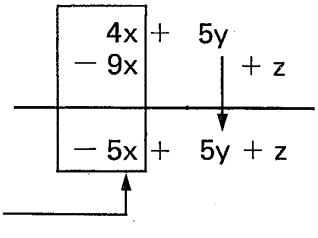
o bien, reduciendo términos semejantes:

$$\boxed{-5x + 5y + z}$$

polinomio suma

100

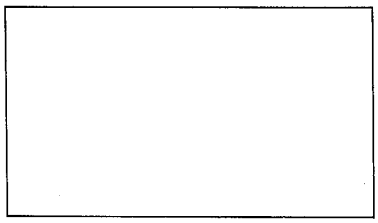
Para facilitar la operación
podemos disponer los sumandos
en la siguiente forma:



101

Dos polinomios.

$x + 3y \quad -x + 2y$



Suma ⟶ ☐

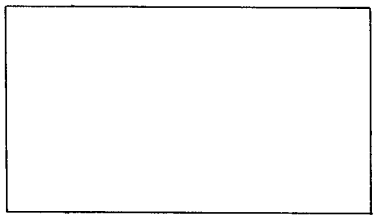
$$\begin{array}{r} x + 3y \\ -x + 2y \\ \hline 0 + 5y \end{array}$$

$5y$

102

Tres polinomios.

$3x^2 - x + 1 \quad x^2 + 3 \quad 5x^2 + x - 5$



Suma ⟶ ☐

$$\begin{array}{r} 3x^2 - x + 1 \\ x^2 \quad + 3 \\ 5x^2 + x - 5 \\ \hline 9x^2 + 0 - 1 \end{array}$$

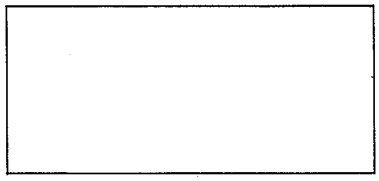
$9x^2 - 1$

103

Cuatro polinomios.

$8x + y + z + u \qquad -3x - 4y - 2z + 3u$

$4x + 5y \qquad -9x + z$



Suma ⟶ ☐

$$\begin{array}{r} 8x + y + z + u \\ -3x - 4y - 2z + 3u \\ 4x + 5y \\ -9x \quad + z \\ \hline 0 + 2y + 0 + 4u \end{array}$$

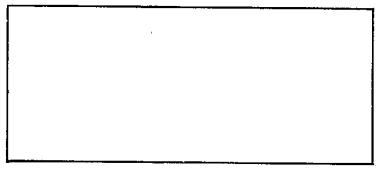
$2y + 4u$

104

Cuatro polinomios.

$x^3y - xy^3 + 5$ $\qquad$ $x^4 - x^2y^2 + 5x^3y - 6$

$-6xy^3 + x^2y^2 + 2$ $\qquad$ $-x^4 + 3xy^3 + 1$



Suma ⟶

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$\begin{array}{rrrr} x^3y - & xy^3 & & + 5 \\ x^4 + 5x^3y & & - x^2y^2 & - 6 \\ & - 6xy^3 & + x^2y^2 & + 2 \\ - x^4 & + 3xy^3 & & + 1 \\ \hline 0 + 6x^3y & - 4xy^3 & + 0 & + 2 \end{array}$$

polinomio suma

1.7.3.2

Establecimiento de una

regla para la suma de polinomios en $\mathbb{Z}$

y práctica adicional de

suma de polinomios en $\mathbb{Z}$,

si se considera necesario.

105

Dos polinomios:

$2x - 3y \qquad -2x + 3y$

Suma

$$2x - 3y$$
$$-2x + 3y$$
$$0 + 0 = 0$$

106

Observar con atención y completar.

$(2x - 3y) + (-2x + 3y) = 0$

Este polinomio es el

inverso aditivo
o
simétrico

del polinomio $2x - 3y$.

107

Dos polinomios:

$5x + x^2 - 1 \qquad 0$

Suma

$5x + x^2 - 1$

108

Atención.

$$(5x + x^2 - 1) + 0 = 5x + x^2 - 1$$

Este sería el elemento neutro o de identidad para la suma de polinomios en $\mathbb{Z}$.

109

Pensemos un poco.

¿Es **asociativa** la suma de polinomios en $\mathbb{Z}$?

Sí/No

Sí

110

¿Es **conmutativa** la suma de polinomios en $\mathbb{Z}$?

Sí/no

Sí

111

Pero,
antes que nada,
¿es **cerrada** la suma de polinomios
en $\mathbb{Z}$?

Sí/No

Estamos confiando en nuestra intuición.

Sí

El resultado de
una suma de
polinomios en $\mathbb{Z}$
es un
polinomio en $\mathbb{Z}$.

112

Podemos, entonces,
hablar de una estructura

$$\boxed{(P_{\mathbb{Z}}, +)}$$

$$P_{\mathbb{Z}} = \{x/x \text{ es un polinomio en } \mathbb{Z}\}$$

que cumple con:

1. Cerradura
2. Asociatividad
3. Existencia de elemento neutro (0)
4. Existencia de elementos inversos
5. Conmutatividad

113

Recordemos las estructuras matemáticas
estudiadas en un módulo anterior.

$$\boxed{(P_{\mathbb{Z}}, +)}$$

es un

$$\llcorner\_\_\_\_\_\lrcorner$$

grupo abeliano

1.7.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* la suma de dos o más polinomios dados, con coeficientes enteros;

- *interpretar* la suma de polinomios en $\mathbb{Z}$ como un grupo abeliano, que cumple con las propiedades de:

  — cerradura
  — asociatividad
  — existencia de elemento neutro
  — existencia de elementos inversos
  — conmutatividad.

7.4

Resta de polinomios en $\mathbb{Z}$.

114

La **resta** o **sustracción de polinomios** con coeficientes enteros puede ser representada por la expresión siguiente:

operador diferencia

$$P_1(x, y \ldots) - P_2(x, y \ldots) = P_3(x, y \ldots)$$

polinomio minuendo — polinomio sustraendo — polinomio diferencia

115

Dos monomios.

$3x$ — $4y$

minuendo — sustraendo

Diferencia

$3x - 4y$

116

Dos monomios.

$7x^2$ $3y^2$

minuendo sustraendo

Diferencia

$7x^2 - 3y^2$

117

$-3x^5$ xy^2

minuendo sustraendo

Diferencia

$-3x^5 - xy^2$

118

$4x^3y$ $-5x^2y^2$

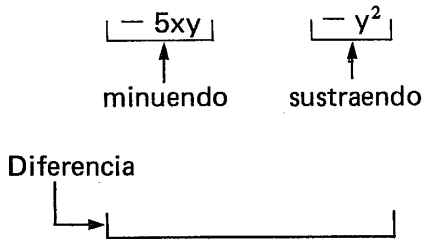
minuendo sustraendo

Diferencia

- $4x^3y - (-5x^2y^2) = 4x^3y + 5x^2y^2$

Observar el cambio de signo del sustraendo.

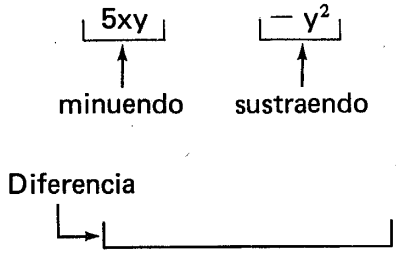
119



- $-5xy-(-y^2)$
  $=-5xy+y^2$

☞ Observar el cambio de signo del sustraendo

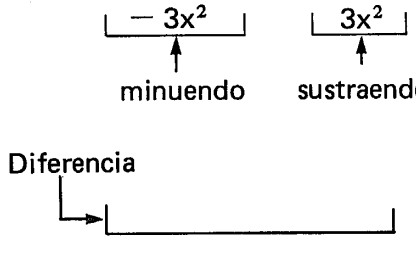
120



- $5xy-(-y^2)$
  $=5xy+y^2$

☞ Observar el cambio de signo del sustraendo

121



- $-3x^3-3x^2$

☞ Observar el cambio de signo del sustraendo

122

Atención.

$\underbrace{-8xy^2}_{\text{sustraendo}}$ $\underbrace{8xy^2}_{\text{minuendo}}$

Diferencia

- $8xy^2 - (-8xy^2) = 8xy^2 + 8xy^2 = 16xy^2$

Hacemos uso de la reducción de términos semejantes para simplificar el resultado.

123

Dos monomios.

$\underbrace{3ab}_{\text{minuendo}}$ $\underbrace{2ab}_{\text{sustraendo}}$

Diferencia

$3ab - 2ab = ab$

124

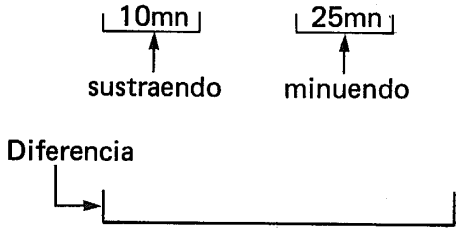
Dos monomios.

$\underbrace{10x^4}_{\text{minuendo}}$ $\underbrace{4x^4}_{\text{sustraendo}}$

Diferencia

$10x^4 - 4x^4 = 6x^4$

125



25 mn − 10mn = 15mn

126

25mn − 10mn = 10mn − 25 mn

V/F

● F

25mn − 10mn = 15mn
10mn − 25mn = − 15mn

15mn ≠ − 15mn

Recordar la
no conmutatividad
de la resta en ℤ.

127

A $5x^3y^4$ restar $3x^3y^4$

Resultado

$5x^3y^4 - 3x^3y^4 = 2x^3y^4$

128

A $3ax^2$ restar $5ax^2$

Resultado

$3ax^2 - 5ax^2 = -2ax^2$

129

Restar 40 ab de 35ab

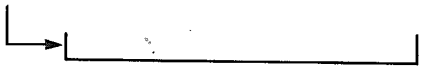
Resultado

$35ab - 40ab = -5ab$

130

Restar $-5x$ de $14x$

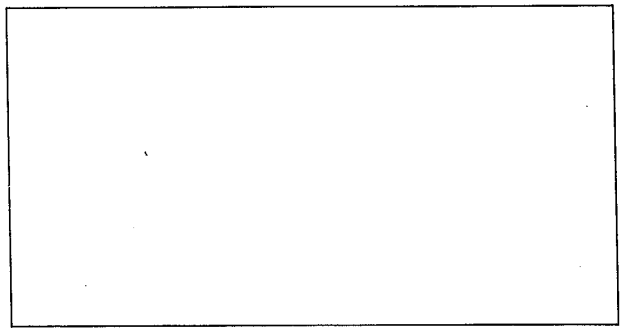
Diferencia



$14x - (-5x) = 14x + 5x$
$= 19x$

131

Establezcamos una **regla para restar monomios:**



Respuesta
en el
cuadro siguiente

Por ejemplo.

Regla para restar monomios

Para restar dos monomios:

- se escribe el minuendo
- a continuación se anota el **inverso aditivo del sustraendo***
- se reducen los términos semejantes, si los hay.

* Es decir, el sustraendo con signo contrario.

1.7.4.1

Práctica adicional de

resta de monomios

si se considera necesario.

132

Dos polinomios.

$3x^2 - 5$ $\quad$ $2x^3 - 8$

minuendo $\quad$ sustraendo

Diferencia

Respuesta en el cuadro siguiente

$3x^2 - 5$ $\quad$ $2x^3 - 8$

minuendo $\quad$ sustraendo

Diferencia:

$$(3x^2 - 5) - (2x^3 - 8)$$

$$= 3x^2 - 5 - 2x^3 + 8 = \boxed{3x^2 - 2x^3 + 3}$$

inverso aditivo de $2x^3 - 8$

reduciendo términos semejantes, obtenemos

133

Se puede disponer la operación así:

$$\begin{array}{rl} 3x^2 - 5 & \leftarrow \text{minuendo} \\ \underline{-2x^3 \quad + 8} & \leftarrow \text{inverso aditivo del sustraendo} \\ -2x^3 + 3x^2 + 3 & \text{Polinomio diferencia} \end{array}$$

134

$a^2 + b^2$ — minuendo

$-a^2 - b^2$ — sustraendo

Diferencia

$a^2 + b^2$
$a^2 + b^2$ ← inverso aditivo del sustraendo

$2a^2 + 2b^2$ ← diferencia

135

$3a + 5b$ — minuendo

$2a - ab + 5b$ — sustraendo

Diferencia

Respuesta en el cuadro siguiente

$3a + 5b$ minuendo

$-2a - 5b + ab$ inverso aditivo del sustraendo

$a \quad + ab$ diferencia

136

$\underbrace{x - y + z}_{\text{minuendo}}$ $\underbrace{x - y + z}_{\text{sustraendo}}$

Diferencia

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\begin{array}{rl} x - y + z & \leftarrow \text{minuendo} \\ -x + y - z & \leftarrow \text{inverso aditivo del sustraendo} \\ \hline 0 & \leftarrow \text{diferencia} \end{array}$$

137

$$(x - y + z) - (x - y + z) = 0$$

Éste es un caso particular de la regla número [ ] para la transformación de expresiones algebraicas, y que hemos simbolizado, en general, así:

[ ]

- 9
- $x - x = 0$

No olvidemos que, en la sustracción en $\mathbb{Z}$, cada elemento es

inverso sustractivo

de sí mismo.

1.7.4.2

Establecimiento de una

regla para la resta de polinomios en $\mathbb{Z}$

y práctica adicional de

resta de polinomios en $\mathbb{Z}$**,**

si se considera necesario.

1.7.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* la resta de dos polinomios dados con coeficientes enteros.

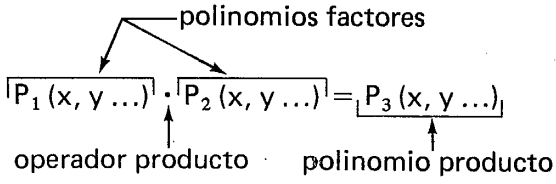
7.5

Multiplicación de polinomios en $\mathbb{Z}$

138

Expresión general de la

multiplicación de polinomios con coeficientes enteros:

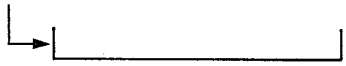


139

Dos monomios:

3a 4b

Producto



$3a \cdot 4b$
y por la conmutatividad:
$3 \cdot 4 \cdot ab$
$= 12ab$

140

Dos monomios:

$5x \quad 12y$

Producto

$5x \cdot 12y$
$= 60xy$

141

Dos monomios:

$7n \quad 3n$

Producto

$7n \cdot 3n$
$= 7 \cdot 3 \cdot n \cdot n$
$= 21n^2$

142

Dos monomios:

$3a \quad 4a^2$

Producto

$3a \cdot 4a^2$
$= 3 \cdot 4 \cdot a \cdot a^2$
$= 12a^3$

Recordemos que:

$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

143

Dos monomios:

$5xy \quad 5xy$

Producto

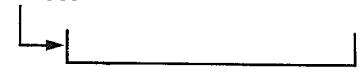
- $5xy \cdot 5xy$
  $= 5 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$
  $= 25x^2y^2$

144

Dos monomios:

$15x^2y^2 \quad -3x$

Producto



$15x^2y^2(-3x)$
$= 15(-3)x^2 \cdot xy^2$
$= -45x^3y^2$

145

Dos monomios:

$3x^2y^2 \quad -2xy$

Producto

$3x^2y^2(-2xy)$
$= 3 \cdot (-2)x^2 \cdot x \cdot y^2 \cdot y$
$= -6x^3y^3$

146

Dos monomios:

$-at^2 \quad t$

Producto

$(-at^2)t = -at^3$

147

Dos monomios:

$-3xy \quad -4xy$

Producto

$(-3xy)(-4xy) = 12x^2y^2$

148

Dos monomios:

$-xy^3 \quad -x^2y^3$

Producto

$(-xy^3)(-x^2y^3) = x^3y^6$

149

Dos monomios:

$-x^2y^2$ $\quad -8$

Producto

$(-x^2y^2)(-8) = 8x^2y^2$

15

Dos monomios:

$3x^3$ $\quad -1$

Producto

$3x^3(-1) = -3x^3$

151

$(-4x^2y^2)(-1) =$ _____

$4x^2y^2$

152

$ax^3 (-1) =$ ⌊_____⌋

$-ax^3$

153

Tres monomios:

$xy \quad 2x^2 \quad 3y$

Producto

→⌊_____⌋

$xy \cdot 2x^2 \cdot 3y = 6x^3y^2$

154

Tres monomios:

$-3x \quad 4x^2 \quad -3$

Producto

→⌊_____⌋

$(-3x) \cdot 4x^2 \cdot (-3) = 36x^3$

155

Cuatro monomios:

$-3a \quad 4b \quad -a \quad -b$

Producto

$(-3a)4b(-a)(-b)$
$= -12a^2b^2$

156

Cuatro monomios

$-3 \quad a^2 \quad b \quad -c$

Producto

$(-3)a^2b(-c)$
$= 3a^2bc$

1.7.5.1

Práctica adicional de

multiplicación de monomios,

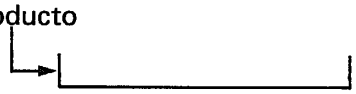
si se considera necesario.

157

Un polinomio (no monomio) y un monomio:

$a + b \quad x$

Producto



$(a + b)x$

158

De acuerdo con la regla 12 (distributividad a la derecha de la multiplicación con respecto a la suma), la expresión

$(a + b)x$

se transforma en

$ax + bx$

159

Un polinomio (no monomio) y un monomio:

$3x + 4y \quad x$

Producto

- $(3x + 4y)x = 3x^2 + 4yx$

Si ordenamos las literales en el segundo término, obtenemos:

$3x^2 + 4xy$

160

En los ejemplos anteriores
podemos observar las

transformaciones

que se operan en una
expresión algebraica
al aplicar las reglas
básicas estudiadas.

161

Un polinomio (no monomio) y un monomio:

$2x^2 + 3y^2 \qquad 3x$

Producto

- $(2x^2 + 3y^2)3x$
  $= 2x^2 \cdot 3x + 3y^2 \cdot 3x$

  $= 6x^3 + 9y^2x$

  Ordenando, obtenemos:

  $6x^3 + 9xy^2$

162

Un polinomio (no monomio) y un monomio:

$(-a + c) \qquad 3b$

Producto

- $(-a+c)\,3b$
  $= -a \cdot 3b + c \cdot 3b$

  $= -3ab + 3cb$

  Ordenando, obtenemos:

  $-3ab + 3bc$

163

Un monomio y un polinomio (no monomio):

$x \qquad 5x - 6$

Producto

- Aplicar la

  (regla 13 o la **15)**

  $x(5x - 6)$
  $= x \cdot 5x + x(-6)$

  $= 5x^2 + (-6x)$
  $= 5x^2 - 6x$

164

Un monomio y un polinomio (no monomio)

$-x \qquad 6xy - 7x$

Producto

$(-x)(6xy - 7x)$
$= -6x^2y + 7x^2$

165

Un monomio y un polinomio (no monomio):

$x^2 \qquad 1 - 3x^3$

Producto

$x^2(1 - 3x^3)$
$= x^2 - 3x^5$

166

Un polinomio (no monomio) y un monomio:

$(-a-b)$ $\quad -b$

Producto

$(-a-b)(-b)$
$= ab + b^2$

167

Un polinomio (no monomio) y un monomio:

$3x - 2y + 1$ $\quad x$

Producto

$(3x - 2y + 1)x$
$= 3x^2 - 2xy + x$

168

Un polinomio (no monomio) y un monomio:

$xy + y^2 - x$ $\quad ax$

Producto

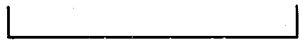
$(xy + y^2 - x)ax$
$= ax^2y + axy^2 - ax^2$

169

Un polinomio (no monomio) y un monomio:

$3x^2 - 2x + 3 \qquad -1$

Producto



Observar el cambio de signo al multiplicar por -1:

$(3x^2 - 2x + 3)(-1)$

$= \underline{-3x^2 + 2x - 3}$

polinomio inverso aditivo de

$3x^2 - 2x + 3$

1.7.5.2

Establecimiento de una
regla para la multiplicación de dos o más monomios
y práctica adicional de

multiplicación de monomios,

si se considera necesario.

170

En los siguientes cuadros
estudiaremos una ampliación de la

propiedad distributiva

de la multiplicación con respecto a la suma.

171

Un ejemplo:

$$7(2 + 3) = 7x2 + 7x3 \quad ----①$$

Si igualamos $7 = 4 + 3$ y sustituimos en ① , obtenemos:

$$(4 + 3)(2 + 3) = (4 + 3)2 + (4 + 3)3$$

Si aplicamos nuevamente la propiedad distributiva en el segundo miembro, obtenemos:

$$(4 + 3)(2 + 3) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$(4 + 3)\,(2 + 3) = 4 \times 2 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 3 \times 3$$

En efecto:

$$35 = 7x5 = 8 + 6 + 12 + 9 = 35$$

172

En general:

$$(a + b)(x + y) = \boxed{\qquad\qquad}$$

$ax + bx + ay + by$

173

Hemos obtenido:

$$(a + b)(x + y) = ax + bx + ay + by$$

Y de manera aún más general:

$$(a + b + \ldots)(x + y + \ldots) = ax + bx + \ldots + ay + by + \ldots + \ldots$$

174

Ahora, aplicaremos la

propiedad distributiva generalizada

de la multiplicación con respecto a la suma para

multiplicar un polinomio por otro polinomio,

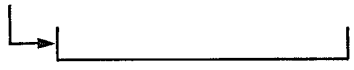
no monomios ambos.

175

Dos polinomios:

$x + y$ $\quad$ $w + z$

Producto



$xw + yw + xz + yz$
o bien, ordenando:
$wx + wy + xz + yz$

176

Dos polinomios:

$x + 3$ $x + 4$

Producto

Respuesta en el cuadro siguiente

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 3x + 4x + 12$$
$$= x^2 + 7x + 12$$

177

Dos polinomios:

$x + y$ $y + z$

Producto

$$(x + y)(y + z)$$
$$= xy + y^2 + xz + yz$$

178

Dos polinomios:

$3x + 4y \qquad x + 2$

Producto

$(3x + 4y)(x + 2) = 3x^2 + 4xy + 6x + 8y$

179

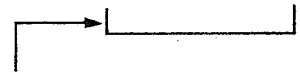
Dos polinomios:

$2x - y + 3z \qquad x - 3y - 4z$

Para calcular su producto
conviene disponer la operación
como se indica en el cuadro siguiente.

180

$$\begin{array}{r} 2x - y + 3z \\ x - 3y - 4z \\ \hline \end{array}$$



Paso 1

$(2x - y + 3z)x$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

181

$$\begin{array}{r} 2x - y + 3z \\ x - 3y - 4z \\ \hline \end{array}$$

Respuesta ⟶ $\mathbf{2x^2 - xy + 3xz}$

Paso 2 ⟶ $(2x - y + 3z)(-3y)$

Respuesta en el cuadro siguiente

182

$$\begin{array}{r} 2x - y + 3z \\ x - 3y - 4z \\ \hline 2x^2 - xy + 3xz \end{array}$$

Respuesta ⟶ $\mathbf{-6xy \quad + 3y^2 - 9yz}$

Paso 3 ⟶ $(2x - y + 3z)(-4z)$

Respuesta en el cuadro siguiente

183

$$\begin{array}{r} 2x - y + 3z \\ x - 3y - 4z \\ \hline 2x^2 - xy + 3xz \\ -6xy \quad + 3y^2 - 9yz \end{array}$$

Respuesta ⟶ $\mathbf{-8xz \quad + 4yz - 12z^2}$

Paso 4 Suma de productos parciales

Respuesta en el cuadro siguiente

$$
\begin{array}{r}
2x - y + 3z \\
x - 3y - 4z \\
\hline
2x^2 - xy + 3xz \\
\quad - 6xy \qquad + 3y^2 - 9yz \\
\qquad\quad - 8xz \qquad\quad + 4yz - 12z^2
\end{array}
$$

Respuesta (polinomio producto) $\mathbf{2x^2 - 7xy - 5xz + 3y^2 - 5yz - 12z^2}$

184

Dos polinomios:

$x^2 + xy + y^2 \qquad x - y$

Se requiere su producto.
Disponer los factores en la forma estudiada.

Respuesta en el cuadro siguiente

Completar la multiplicación.

$$
\begin{array}{r}
x^2 + xy + y^2 \\
x - y \\
\hline
x^3 + x^2y + xy^2 \\
\quad - x^2y - xy^2 - y^3 \\
\hline
x^3 + \bigcirc + \bigcirc - y^3
\end{array}
$$

polinomio producto

1.7.5.3

Establecimiento de una

regla para la multiplicación de dos polinomios en $\mathbb{Z}$,

y práctica adicional de
multiplicación de dos polinomios en $\mathbb{Z}$,
si se considera necesario.

185

Señalar la opción correcta.

La multiplicación de polinomios en $\mathbb{Z}$
es una operación **cerrada.**

V/F

V

186

La multiplicación de polinomios enteros
es una operación

asociativa,

es decir,

$$[P_1(x, y \ldots)P_2(x, y \ldots)]P_3(x, y \ldots)$$

$$= P_1(x, y \ldots)\,[P_2(x, y \ldots)P_3(x, y \ldots)]$$

V/F

V

187

En la multiplicación de polinomios enteros existe un elemento neutro o de identidad,

$$P(x, y \ldots) \cdot e = P(x, y \ldots)$$

V/F

V

En caso de existir

$e =$ [_____]

1

188

En la multiplicación de polinomios en $\mathbb{Z}$ hay un elemento inverso para todo elemento de $P_{\mathbb{Z}}$.

$$P(x, y \ldots) \cdot [\_\_\_\_\_] = 1$$

$$\forall\, P(x, y, \ldots) \in P_{\mathbb{Z}}$$

V/F

F

189

La multiplicación de polinomios en $\mathbb{Z}$ es

conmutativa

$$P(x, y \ldots) \in P_{\mathbb{Z}},$$

$$P_1(x, y \ldots) \cdot P_2(x, y \ldots) = P_2(x, y \ldots) \cdot P_1(x, y \ldots)$$

V/F

V

190

Entonces, la estructura

$(P_{\mathbb{Z}}, x)$

es un

_____

monoide abeliano

191

La multiplicación de polinomios en $\mathbb{Z}$ es **distributiva** (a derecha e izquierda) con respecto a la suma

$$[P_1(x, y \ldots) + P_2(x, y \ldots)]P_3(x, y \ldots)$$

$$= P_1(x, y \ldots)P_3(x, y \ldots) + P_2(x, y \ldots)P_3(x, y \ldots)$$

V/F

V

192

Por lo tanto, la estructura

$(P_{\mathbb{Z}}, + x)$

es un

_____

anillo unitario conmutativo
o
anillo conmutativo con unidad

193

Podemos hablar, entonces, del **anillo** unitario conmutativo de los polinomios en $\mathbb{Z}$.

1.7.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

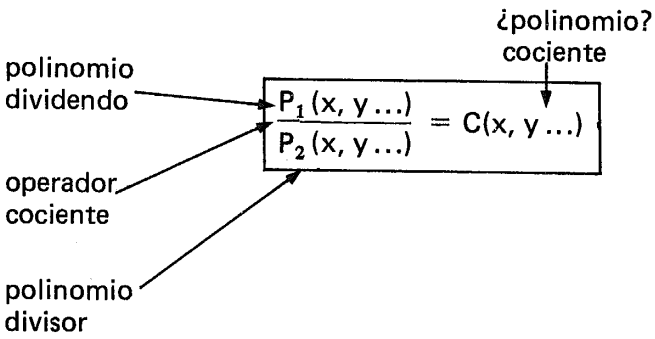
- *efectuar* la multiplicación de dos polinomios dados, con coeficientes enteros;
- *interpretar* la multiplicación de polinomios en $\mathbb{Z}$ como un monoide abeliano;
- *dar* las propiedades del anillo unitario conmutativo $(P_{\mathbb{Z}}, +, x)$ en que $P_{\mathbb{Z}} = \{x | x \text{ es un polinomio con coeficientes enteros}\}$

7.6

División de polinomios en $\mathbb{Z}$

194

La **división de polinomios en** $\mathbb{Z}$
podría ser expresada, en general, así:



195

Recordemos el concepto de

división

como

operación inversa

de la

multiplicación.

196

$\frac{10}{2} = 5$

puesto que $2x5 = 10$

197

$\frac{35}{7} =$ ⌊_____⌋

puesto que

⌊_____⌋

$\frac{35}{7} = 5$

puesto que

$7x5 = 35$

198

$\frac{8a}{4} =$ ⌊_____⌋

puesto que

⌊_____⌋

$\frac{8a}{4} = 2a$

puesto que

$4x2a = 8a$

199

$$\frac{x}{x} = \square$$

puesto que

$$\square$$

$$\frac{x}{x} = 1$$

$$x \cdot 1 = x$$

200

$$\frac{ax}{a} = \square$$

puesto que

$$\square$$

$$\frac{ax}{a} = x$$

puesto que

$$a \cdot x = ax$$

201

También

$$\frac{ax}{a} = x$$

puesto que

$$\frac{a}{a} = 1 \leftarrow \text{elemento neutro de la multiplicación}$$

y

$$\frac{ax}{a} = 1 \cdot x = x$$

202

$$\frac{5a^2}{5} = \square$$

puesto que $\frac{\square}{\square} = 1$

- $\frac{\cancel{5}a^2}{\cancel{5}} = a^2$ (1)
- $\frac{5}{5}$

203

$$\frac{ab^2}{a} = \square$$

$\frac{\cancel{a}b^2}{\cancel{a}} = b^2$ (1)

204

$$\frac{x^2y^2}{x^2} = \square$$

$\frac{\cancel{x^2}y^2}{\cancel{x^2}} = y^2$ (1)

205

$$\frac{a(x+b)}{a} = \square$$

$$\frac{\cancel{a}(x+b)}{\cancel{a}} = x + b$$

①

206

$$\frac{(a+b)(x^2+1)}{a+b} = \square$$

$$\frac{\cancel{(a+b)}(x^2+1)}{\cancel{a+b}} = x^2 + 1$$

①

207

$$\frac{x^2+3x}{x^2+3x} = \square$$

$$\frac{\cancel{x^2+3x}}{\cancel{x^2+3x}} = 1$$

①

208

$$\frac{a^2}{a} = a$$

puesto que

$$\frac{a \cdot a}{a} = a$$

209

$$\frac{a^3}{a^2} = \square$$

$$\frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a$$

$$① \cdot ① = 1$$

210

$$\frac{x^5}{x} = \square$$

$$\frac{\overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}^{x^4} \cdot x}{x} = x^4$$

①

211

$$\frac{x^8}{x^3} = \square$$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$\frac{x \cdot x \cdot x \cdot \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}^{x^5}}{x \cdot x \cdot x} = x^5$$

$$\textcircled{1} \cdot \textcircled{1} \cdot \textcircled{1} = 1$$

212

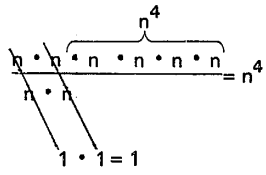
$$\frac{m^5}{m^2} = \square$$

$$\frac{m \cdot m \cdot \overbrace{m \cdot m \cdot m}^{m^3}}{m \cdot m} = m^3$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

213

$$\frac{n^6}{n^2} = \boxed{}$$



214

Recordemos que, en general

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$m, n \in \mathbb{N}$
$m \geqslant n$

siempre que x sea diferente de 0.

215

Así:

$$\frac{x^{10}}{x^7} = \boxed{}$$

x^3

216

$$\frac{a^3 b^2}{a^2 b} = \square$$

ab

217

$$\frac{a^5 b^2 c}{a^3 bc} = \square$$

$a^2 b$

218

$$\frac{10x^3 y^2 z^5}{2xyz^3} = \square$$

$5x^2 yz^2$

219

$$\frac{25m^6 n^4 r^3}{5m^3 n^2 r} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$5m^3 n^2 r^2$

220

Atención.

$$\frac{a}{a^2} = \boxed{\qquad\qquad}$$

En este caso:
$m < n$

en $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

$$\frac{a}{a \cdot a} = \frac{1}{a}$$

pero $\frac{1}{a}$

(no) es un polinomio.

221

Nos damos cuenta de que

la división de polinomios en $\mathbb{Z}$

$\boxed{\qquad\qquad}$ una operación **cerrada.**

es/no es

- no es

Es decir, no se define la operación de división de polinomios enteros.

222

Atención.

$$\frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$$

polinomio (numerador) — polinomio (denominador)

no polinomio

223

$$\frac{x^3}{x^2} = x$$

puesto que $x^2 \cdot x = x^3$

224

$$-\frac{x^3}{x^2} = \square$$

puesto que

$\square$

$$\frac{x^3}{-x^2} = -x$$

$$(-x^2)(-x) = x^3$$

225

$$\frac{-x^3}{x^2} = \square$$

puesto que

$\square$

$$\frac{-x^3}{x^2} = -x$$

$$x^2(-x) = -x^3$$

226

$$\frac{-x^3}{-x^2} = \square$$

puesto que

$\square$

$$\frac{-x^3}{-x^2} = x$$

$$(-x^2)x = -x^3$$

227

Podemos establecer las siguientes reglas para la **división de polinomios,** para los casos en que se defina esta operación:

÷	+	−
+	+	−
−	−	+

228

$$\frac{-14x^3y^2}{2xy^2} = \square$$

$-7x^2$

229

$$\frac{10ab^3}{-5b} = \square$$

$-2ab^2$

230

$$\frac{-5m^6n^4}{-m^4n^4} = \square$$

$5m^2$

1.7.6.1

Establecimiento de una

regla para la división de monomios en $\mathbb{Z}$

(para los casos en que se defina esta operación)
y práctica adicional de

división de monomios en $\mathbb{Z}$,

si se considera necesario.

231

El producto de un
polinomio (no monomio) y
un monomio lo hemos obtenido
gracias a la

**propiedad distributiva de la
multiplicación con respecto
a la suma:**

$$(a + b)x = ax + bx$$

232

Investigamos, ahora, si es válida
la propiedad similar de

**distributividad de la división con
respecto a la suma**

para obtener el cociente de
un polinomio (no monomio) y
un monomio:

$$\frac{a + b}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x}$$

V/F

- V

Un ejemplo.

$$\frac{20 + 10}{5} = \frac{20}{5} + \frac{10}{5}$$

$$\frac{30}{5} = 4 + 2$$

$$6 = 4 + 2$$

233

A la izquierda:

$$\frac{x}{a+b} = \frac{x}{a} + \frac{x}{b}$$

V/F

- F

Ejemplo:

$$\frac{60}{10+20} = \frac{60}{10} + \frac{60}{20}$$

$$\frac{60}{30} = 6 + 3$$

$$2 \neq 9$$

234

Aplicaremos la propiedad
distributiva (a la derecha)
de la división con respecto a la suma,
para efectuar la división de un

polinomio (no monomio) y un monomio.

235

$$\frac{3x^2 + 3}{3} = \square$$

$$\frac{3x^2}{3} + \frac{3}{3}$$

$$= x^2 + 1$$

236

$$\frac{8x^3 - 4x}{4} = \square$$

$$\frac{8x^3}{4} - \frac{4x}{4}$$
$$= 2x^3 - x$$

237

$$\frac{12a^2b^2 - 4ab - 4}{4a} = \square$$

$$\frac{12a^2b^2}{4a} - \frac{4ab}{4a} - \frac{4}{4a}$$
$$= 3ab^2 - b - \frac{1}{a}$$

238

¿Es $3ab^2 - b - \frac{1}{a}$ un polinomio?

Sí/No

No

239

La división de un polinomio (no monomio) en $\mathbb{Z}$ entre un monomio en $\mathbb{Z}$

es/no es

una operación **cerrada.**

no es

240

$$\frac{3x^2y^3 - 3a^2x^4}{-3x^2} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

Estudiar con atención esta respuesta y las siguientes.

$$\frac{3x^2y^3}{-3x^2} + \frac{-3a^2x^4}{-3x^2}$$

$$= -y^3 + a^2x^2$$

241

$$\frac{x^3 - 4x^2 + x}{x} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

- $\dfrac{x^3 - 4x^2 + x}{x}$

$$= \frac{x^3}{x} + \frac{-4x^2}{x} + \frac{x}{x}$$

$$= x^2 + (-4x) + 1$$

$$= x^2 - 4x + 1$$

1.7.6.2

Establecimiento de una

regla para la división de un polinomio (no monomio) en $\mathbb{Z}$ entre un monomio en $\mathbb{Z}$,

y práctica adicional,
si se considera necesario.

242

Se requiere ahora determinar
el cociente de la
siguiente división:

$$\frac{2x + 3x^2 - 8}{x + 2} = ?$$

243

La propiedad distributiva

no

nos ayuda en este caso.

244

El problema consiste en
encontrar un cierto número
que multiplicado por $x + 2$
dé como resultado: $2x + 3x^2 - 8$.

$$\frac{2x + 3x^2 - 8}{x + 2} = ?$$

de acuerdo con nuestro concepto de división.

245

Lo anterior se logra
mediante el

algoritmo

descrito en los
siguientes cuadros.

246

1. **Ordenar** los dos polinomios
   — dividendo y divisor —
   en forma descendente,
   en caso de no estar ordenados:

polinomio dividendo ordenado

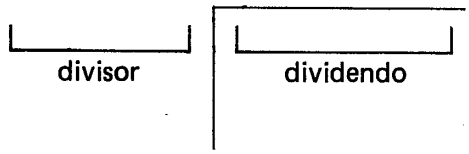
$$\frac{2x + 3x^2 - 8}{x + 2} = \frac{\square}{\square}$$

polinomio divisor ordenado

$$\frac{3x^2 + 2x - 8}{x + 2}$$

247

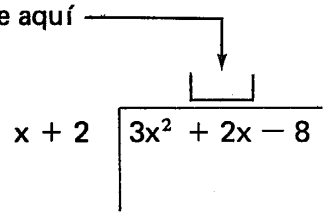
2. **Disponer** los operandos — dividendo y divisor — en la forma como se hace en la división aritmética:



$x + 2 \overline{)3x^2 + 2x - 8}$

248

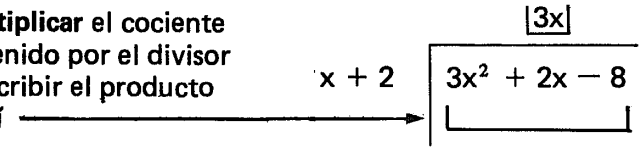
3. **Dividir** el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, y escribir el cociente aquí



Respuesta en el cuadro siguiente

249

4. **Multiplicar** el cociente obtenido por el divisor y escribir el producto aquí



Respuesta en el cuadro siguiente

250

5. **Restar** el producto obtenido, de los dos primeros términos del dividendo y escribir la diferencia aquí

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \hline x+2 & 3x^2+2x-8 \\ & 3x^2+6x \\ \hline & \square \end{array}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

251

6. **"Bajar"** el siguiente término del dividendo, aquí

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \hline x+2 & 3x^2+2x-8 \\ & -3x^2-6x \quad \leftarrow \text{inverso aditivo} \\ \hline & -4x \quad \square \end{array}$$

Respuesta en en el cuadro siguiente

252

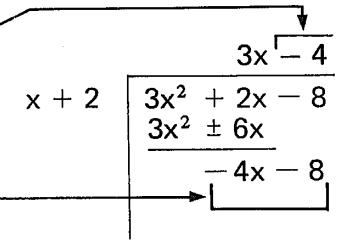
7. **Dividir** el primer término del residuo entre el primer término del divisor y anotar el resultado aquí

$$\begin{array}{r|l} & 3x\square \\ \hline x+2 & 3x^2+2x-8 \\ & 3x^2 \pm 6x \\ \hline & -4x-8 \end{array}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

253

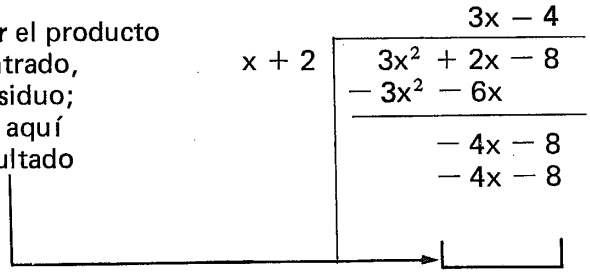
8. **Multiplicar este** cociente por el divisor y anotar el resultado aquí



Respuesta en el cuadro siguiente

254

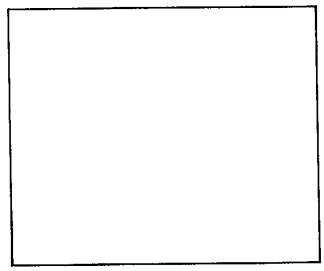
9. **Restar** el producto encontrado, del residuo; anota aquí el resultado

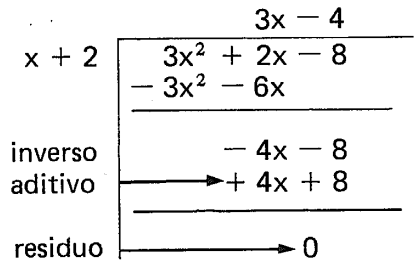


Respuesta en el cuadro siguiente

255

10. **Comprobar** el resultado obtenido:





Respuesta en el cuadro siguiente

Comprobación:

$3x - 4$ ← cociente
$x + 2$ ← divisor
$3x^2 - 4x$
$6x - 8$
$3x^2 + 2x - 8$ ← dividendo

$$\begin{array}{r|l} & 3x - 4 \\ \hline x + 2 & 3x^2 + 2x - 8 \\ & -3x^2 - 6x \\ \hline & -4x - 8 \\ & +4x + 8 \\ \hline & 0 \leftarrow \text{residuo} \end{array}$$

256

Otro ejemplo:

dividendo: $x^2 - 20 + x$

divisor: $5 + x$
cociente:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$\begin{array}{r|l} & x - 4 \\ \hline x + 5 & x^2 + x - 20 \\ & -x^2 - 5x \\ \hline & -4x - 20 \\ & +4x + 20 \\ \hline & 0 \leftarrow \text{residuo} \end{array}$$

cociente: $x - 4$

Comprobación:

$x + 5$
$x - 4$
$x^2 + 5x$
$-4x - 20$
$x^2 + x - 20$

257

Un ejemplo más:

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = ?$$

Polinomio dividendo,
escrito en su forma completa
y
ordenado con respecto a x.

Respuesta
en el
cuadro siguiente

258

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y}$$

$$x^3 \quad 0 \cdot x^2 \quad 0 \cdot x^1 \quad -y^3 \cdot x^0$$

$$x^3 + 0 + 0 - y^3$$

Polinomio divisor completo, ordenado con respecto a x.

Respuesta
en el
cuadro siguiente

259

$$\frac{x^3 + 0 + 0 - y^3}{x - y}$$

Efectuar la división
en la forma estudiada.

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + xy + y^2 \\
\hline
x - y & x^3 + 0 + 0 - y^3 \\
 & -x^3 + x^2y \\
\hline
 & \quad x^2y + 0 \\
 & -x^2y + xy^2 \\
\hline
 & \quad\quad xy^2 - y^3 \\
 & \quad\quad -xy^2 + y^3 \\
\hline
 & \quad\quad\quad 0 \leftarrow \text{residuo}
\end{array}
$$

Comprobación:

$$
\begin{array}{r}
x^2 + xy + y^2 \\
\hline
x - y \\
\hline
x^3 + x^2y + xy^2 \\
-x^2y - xy^2 - y^3 \\
\hline
x^3 + 0 + 0 - y^3 \\
\hline
x^3 - y^3
\end{array}
$$

260

En los ejercicios estudiados
el residuo es cero
(la división es exacta),
pero no siempre sucede así.

261

Veamos este ejemplo:

$$\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 4}$$

Efectuar la división en la forma estudiada.

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$\begin{array}{r|l} & x - 1 \\ \hline x - 4 & x^2 - 5x + 7 \\ & -x^2 + 4x \\ \hline & -x + 7 \\ & +x - 4 \\ \hline & 3 \end{array}$$

Para comprobar, recordemos que:

dividendo = divisor × cociente + residuo

$$\begin{array}{l} x - 4 \leftarrow \text{divisor} \\ x - 1 \leftarrow \text{cociente} \\ \hline x^2 - 4x \\ \quad - x + 4 \\ \hline x^2 - 5x + 4 \\ \quad + 3 \leftarrow \text{residuo} \\ \hline x^2 - 5x + 7 \leftarrow \text{dividendo} \end{array}$$

262

$$\begin{array}{r|l} & x - 1 \leftarrow \text{cociente} \\ \hline x - 4 \leftarrow \text{divisor} & x^2 - 5x + 7 \leftarrow \text{dividendo} \\ & -x^2 + 4x \\ \hline & -x + 7 \\ & x - 4 \\ \hline & 3 \leftarrow \text{residuo} \end{array}$$

El resultado puede expresarse así:

$$x - 1 + \frac{3}{x - 4}$$

¿Este cociente es un polinomio en $\mathbb{Z}$? Sí/No

No

263

La división de polinomios en $\mathbb{Z}$

[ ]

es/no es una operación **cerrada.**

no es

1.7.6.3

Práctica adicional,
se considera necesario.

1.7.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* la división de dos monomios dados, con coeficientes enteros;
- *efectuar* la división de un polinomio (no monomio) entre un monomio, ambos con coeficientes enteros;
- *efectuar* la división de dos polinomios con coeficientes enteros.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 12 de abril de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100